理系数学　207

2020年度　入学試験問題

数　　学

注　意

(1) **解答用紙**は(一)と(二)のそれぞれ1枚ずつである。

(2) 受験番号の記入欄は，解答用紙(一)，(二)のそれぞれ表面に2か所，裏面に1か所ある。合計6か所とも正確・明瞭に記入すること。

(3) 氏名の記入欄は，解答用紙(一)，(二)の表面にそれぞれ1か所ある。合計2か所とも正確・明瞭に記入すること。

(4) 解答はすべて**解答用紙の所定の箇所**に記入すること。
問題〔Ⅰ〕の解答は解答用紙(一)の〔Ⅰ〕の欄に記入。
問題〔Ⅱ〕の解答は解答用紙(一)の〔Ⅱ〕の欄に記入。
問題〔Ⅲ〕の解答は解答用紙(二)の〔Ⅲ〕の欄に記入。
問題〔Ⅳ〕の解答は解答用紙(二)の〔Ⅳ〕の欄に記入。

(5) 問題紙の本文は2ページである。

(6) 問題紙の余白は計算に使用してもよい。

(7) 問題紙を切り離して使用してはならない。

(8) 試験開始後，問題紙に落丁・損傷がないか確認すること。

(9) 試験終了後，問題紙は各自持ち帰ること。

〔Ⅰ〕次の $\boxed{}$ に適する数または式を，解答用紙の同じ記号のついた $\boxed{}$ の中に記入せよ．

(1) n を5以上の自然数とする．1から n までの異なる番号をつけた n 個の袋があり，番号 k の袋には黒玉 k 個と白玉 $n-k$ 個が入っている．まず，番号 k $(1 \leqq k \leqq n)$ が定まっているとき，その番号 k の袋から玉を1つ取り出してもとに戻す試行を5回繰り返す．このとき，黒玉を3回取り出す確率を $p_n(k)$，少なくとも1回白玉を取り出す確率を $q_n(k)$ とすると，$n=5$ の場合は $p_5(k) = \boxed{\text{ア}}$，$q_5(k) = \boxed{\text{イ}}$ であり，$n > 5$ の場合は $p_n(k) = \boxed{\text{ウ}}$ である．次に，n 個の袋から無作為に1つ袋を選び，その選んだ袋から玉を1つ取り出してもとに戻す試行を5回繰り返す．このとき，黒玉を3回取り出す確率を r_n とすると，r_n は $p_n(k)$ を用いて $r_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} p_n(k)$ と表される．例えば，r_5 の値は $\boxed{\text{エ}}$ である．また，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} r_n$ は $\boxed{\text{オ}}$ である．

(2) $x(t) = t^3 - \dfrac{3}{4}t$，$y(t) = -\dfrac{3}{2}t^2 + \dfrac{1}{8}$ として，$x = x(t)$，$y = y(t)$ で表される xy 平面上の曲線を C とする．C は x 軸と2点 $(p,q) = (\pm\boxed{\text{カ}},0)$ で交わり，x 軸の正の部分にある交点における C の接線の傾きは $\boxed{\text{キ}}$ である．次に，異なる2つの実数 t_1，t_2 $(t_1 < t_2)$ に対して，$x(t_1) = x(t_2)$，$y(t_1) = y(t_2)$ が成り立つとすると，$t_1 = \boxed{\text{ク}}$，$t_2 = \boxed{\text{ケ}}$ である．さらに，曲線 C の $t_1 \leqq t \leqq t_2$ の部分を C_0 とおくと，C_0 の長さは $\boxed{\text{コ}}$ である．

〔Ⅱ〕a と b を正の定数とする．関数 $f(x) = a + b(1+\cos x)\sin x$ $(0 \leqq x \leqq 2\pi)$ の最小値が $\dfrac{1}{2}$ であるとき，次の問いに答えよ．

(1) $f'(x) = 0$ を満たす x の値を $0 \leqq x \leqq 2\pi$ の範囲ですべて求めよ．

(2) $f(x)$ の最小値が $\dfrac{1}{2}$ であることを用いて，a を b で表せ．

(3) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸，および2直線 $x=0$，$x=2\pi$ で囲まれた図形を S とする．S の面積が 2π となるとき，a，b の値を求めよ．

(4) a，b の値は (3) で求めた値とする．このとき，S を x 軸の周りに1回転させてできる立体の体積を求めよ．

〔Ⅲ〕 n を自然数とし，関数 $f_n(x)=e^x-\left(1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}\right)$，$E_n(x)=\dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^x (x-t)^n e^t\,dt$ を考える．次の問いに答えよ．

(1) 関数 $y=e^{-x}f_n(x)$ に対して $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ．また，それを用いて，$x>0$ のとき不等式 $f_n(x)>0$ が成り立つことを示せ．

(2) M を正の定数とする．(1) より，$x>0$ のとき $e^x>\dfrac{x^n}{n!}$ である．これを用いて，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{M^n}{(n+1)!}=0$ であることを示せ．

(3) $E_1(x)$ を求めよ．

(4) $n\geqq 2$ とする．$E_n(x)=E_{n-1}(x)+a_nx^n$ となるような a_n を求めよ．

(5) $E_n(x)=f_n(x)$ であることを示せ．

(6) 正の実数 x_0 に対して，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x_0)=0$ であることを示せ．

〔Ⅳ〕 座標平面上に点 $\mathrm{S}(0,-1)$ をとり，双曲線 $y^2-x^2=1$ の第1象限にある部分を C とおく．C 上に動点Pをとり，点Pから y 軸に下ろした垂線と y 軸との交点をQとし，$\angle\mathrm{PSQ}=\theta$ とする．さらに，線分PS上の点Rは，点Pと異なり，$\mathrm{QR}=\mathrm{QP}$ を満たすとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 点Pの x 座標が1になるときの θ の値を θ_1，$\triangle\mathrm{PQR}$ が正三角形になるときの θ の値を θ_2 とおく．$\tan 2\theta_1$ と $\tan 2\theta_2$ の値を求めよ．

(2) 点Pの座標を $\cos 2\theta$ と $\sin 2\theta$ を用いて表せ．

(3) $\mathrm{PR}:\mathrm{RS}=r:(1-r)$ $(0<r<1)$ とおく．r を $\cos 2\theta$ を用いて表せ．

(4) 点Rの座標を $\cos 2\theta$ と $\sin 2\theta$ を用いて表せ．また，それを用いて，点Pが C 上を動くとき，点Rが描く軌跡の方程式を求めよ．さらに，(1) で定めた θ_1 と θ_2 に対して，点Rの軌跡のうちで $\theta_1\leqq\theta\leqq\theta_2$ の部分の長さを求めよ．