理系数学　204

2020年度　入学試験問題

数　学

注　意

(1)　**解答用紙**は(一)と(二)のそれぞれ１枚ずつである。

(2)　受験番号の記入欄は，解答用紙(一)，(二)のそれぞれ表面に２か所，裏面に１か所ある。合計６か所とも正確・明瞭に記入すること。

(3)　氏名の記入欄は，解答用紙(一)，(二)の表面にそれぞれ１か所ある。合計２か所とも正確・明瞭に記入すること。

(4)　解答はすべて**解答用紙の所定の箇所**に記入すること。
問題〔Ⅰ〕の解答は解答用紙(一)の〔Ⅰ〕の欄に記入。
問題〔Ⅱ〕の解答は解答用紙(一)の〔Ⅱ〕の欄に記入。
問題〔Ⅲ〕の解答は解答用紙(二)の〔Ⅲ〕の欄に記入。
問題〔Ⅳ〕の解答は解答用紙(二)の〔Ⅳ〕の欄に記入。

(5)　問題紙の本文は２ページである。

(6)　問題紙の余白は計算に使用してもよい。

(7)　問題紙を切り離して使用してはならない。

(8)　試験開始後，問題紙に落丁・損傷がないか確認すること。

(9)　試験終了後，問題紙は各自持ち帰ること。

〔 I 〕 次の $\boxed{}$ に適する数または式を，解答用紙の同じ記号のついた $\boxed{}$ の中に記入せよ．

(1) n を 5 以上の自然数とする．4 つの文字 a，b，c，d から重複を許して n 個を選んで左から 1 列に並べ，n 個の文字の列を作る．ただし，隣り合う文字は必ず異なるものとする．まず $n=5$，つまり 5 個の文字の列を考えたとき，b，c，d をすべて 1 つずつ含み a から始まり a で終わる文字の列は $\boxed{\text{ア}}$ 通りあり，b を 1 つだけ含み a から始まり a で終わる文字の列は $\boxed{\text{イ}}$ 通りある．次に n 個の文字の列を考えたとき，d を 1 つも含まない a から始まる文字の列は $\boxed{\text{ウ}}$ 通り，d は 1 つも含まないが b，c をいずれも 1 つ以上含む a から始まる文字の列は $\boxed{\text{エ}}$ 通り，b，c，d をすべて 1 つ以上含む a から始まる文字の列は $\boxed{\text{オ}}$ 通りある．

(2) a，b を正の実数，i を虚数単位，$P(x)=x^4-ax^3+bx^2-2ax+4$ とし，方程式 $P(x)=0$ が複素数 $\alpha=1+i$ を解にもつとする．b を a で表すと $b=\boxed{\text{カ}}$ である．また，$\alpha=1+i$ は，実数係数の 2 次式 $Q(x)=x^2-2x+\boxed{\text{キ}}$ に対して，方程式 $Q(x)=0$ の解となる．このとき，$P(x)=Q(x)R(x)$ である．ここで $R(x)$ は x についての 2 次式で，x の 1 次の項の係数は $\boxed{\text{ク}}$ である．これより，$P(x)=0$ が異なる 2 つの実数解をもつような a の値の範囲を $a>a_0$ とすると，$a_0=\boxed{\text{ケ}}$ である．さらに，$a>a_0$ のとき，複素数の範囲で考えた $P(x)=0$ の α 以外の解を β，γ，δ とすると，複素数平面上の 4 点 $\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$，$\mathrm{C}(\gamma)$，$\mathrm{D}(\delta)$ のうちのいずれかの 3 点が一直線上にあるのは $a=\boxed{\text{コ}}$ のときである．

〔 II 〕 $f(x)=1+(e-1)\log x\ \ (x>0)$ とし，曲線 $y=f(x)$ を C とする．ただし，e は自然対数の底である．次の問いに答えよ．

(1) $f(1)$，$f(e)$ を求めよ．

(2) $g(x)=f(x)-x$ とする．関数 $y=g(x)$ の増減を調べ，その極値を求めよ．さらに，$g(x)\geqq 0$ を満たす x の値の範囲を求めよ．

(3) $f(x)$ の不定積分 $\displaystyle\int f(x)\,dx$ を求めよ．

(4) C と直線 $y=x$ によって囲まれた部分の面積 S を求めよ．

〔 III 〕 xyz 空間の 4 点 A，B，C，D はいずれも原点を中心とするある球面 S 上にあり，四面体 ABCD は正四面体であるとする．さらに，点 A の座標は $(1, 1, 4)$，点 B は xy 平面上にあり，点 C の x 座標は正である．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 球面 S の半径を求めよ．

(2) 正四面体 ABCD の一辺の長さを a とする．点 A から平面 BCD に垂線 AH を下ろす．このとき，線分 AH の長さを a を用いて表せ．

(3) 正四面体 ABCD の一辺の長さ a を求めよ．

(4) 点 B の座標を求めよ．

(5) 点 C の座標を求めよ．

〔 IV 〕 r は $0 < r < 1$ を満たす実数とする．次の問いに答えよ．

(1) $r^{-x^2}\dfrac{d}{dx}\left(x^2 r^{x^2}\right)$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{2}} |x| \left(1 + x^2 \log r\right) r^{x^2}\, dx$ を求めよ．

(3) 和 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i r^{i-1}$ を求めよ．

(4) n を自然数として，定数 a_i $(i = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$ の値は，-1，$-\sqrt{2}$，$-\sqrt{3}$，$\cdots$，$-\sqrt{n}$ のいずれかであり，互いに異なるように定めるものとする．また，定数 b_i $(i = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$ の値は，1，$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$\cdots$，$\sqrt{n}$ のいずれかであり，互いに異なるように定めるものとする．この定数 a_i，b_i を用いて，$T_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \int_{a_i}^{b_i} |x| \left(1 + \sin x + x^2 \log r\right) r^{x^2 - 1}\, dx$ とおく．このとき，T_n は a_i と b_i の定め方によらずに n と r だけで定まることを示し，T_n を n と r の式で表せ．さらに，$\displaystyle\lim_{n \to \infty} T_n$ を計算せよ．ただし，必要ならば $\displaystyle\lim_{n \to \infty} n r^n = 0$ であることを証明なしに用いてよい．