

数 学

〔 I 〕 次の に適する数または式を、解答用紙の同じ記号の付いた の中に記入せよ。

(1) a, b を定数としたときに、 x の整式 $f(x)$ が

$$f(x+1) - 2f(x) + f(x-1) = 6x - 2, \quad f(0) = a, \quad f(1) = b$$

を満たすものとする。このとき、 $f(x)$ の次数は ア である。
 $F(x) = f(x+1) - f(x)$ とするとき、 $F(x)$ は x, a, b を用いて イ と表される。 $f(x)$ は x, a, b を用いて ウ と表される。関数 $y = f(x)$ が $x = 2$ で極小値 $f(2) = -24$ をとるとき、 a は エ , b は オ である。

(2) 当たりくじ 5 本を含む 10 本のくじがある。この中から A 君、B 君を含む 10 人が順にくじを 1 本ずつ引いていく。ただし、引いたくじはもとに戻さない。2 本目の当たりくじを引く確率が最も大きい人は カ 番目にくじを引く人、5 本目の当たりくじを引く確率が最も大きい人は キ 番目にくじを引く人である。

A 君は 3 番目、B 君は 7 番目にくじを引くことになった。A 君が当たりくじを引く確率は ク である。B 君が 3 本目の当たりくじを引く確率は ケ である。また、A 君が 2 本目の当たりくじを引き、かつ B 君が 4 本目の当たりくじを引く確率は コ である。

〔 II 〕 次の問いに答えよ。

- (1) 72 の正の約数の個数と総和をそれぞれ求めよ。
- (2) p, q を素数とし、 $p < q$ であるとする。また、 a, b を正の整数とし、 n を

$$n = p^a q^b$$

で定める。このとき、 n の正の約数の個数と総和を a, b, p, q のうち必要なものを用いて表せ。

- (3) p, q, r を素数とし、 $p < q < r$ であるとする。また、 a, b, c を正の整数とし、 m を

$$m = p^a q^b r^c$$

で定める。このとき、 m の正の約数の個数が奇数となるための必要十分条件を a, b, c を用いて表せ。

- (4) 正の約数の個数が奇数となる正の整数はどのような整数か答えよ。
- (5) 1 以上 2020 以下の整数のうち、正の約数の個数が奇数となる整数の総和を求めよ。

〔 III 〕 関数 $f(x) = x^2 - \frac{1}{4}$ とする。 $0 \leq \theta < 2\pi$ とし、点 $P(\cos \theta, \sin \theta)$ から放物線 $C: y = f(x)$ に接線を引くことを考える。次の問いに答えよ。

- (1) 点 P から放物線 C に異なる 2 本の接線が引けるような θ の値の範囲を求めよ。
- (2) θ の値が (1) で求めた範囲にあるとき、点 P から放物線 C に引いた 2 本の接線と放物線 C との接点を $Q(q, f(q)), R(r, f(r))$ ($q < r$) とする。線分 PQ, PR と放物線 C で囲まれた部分の面積を $S(\theta)$ とおくと、 $S(\theta)$ を θ で表せ。
- (3) $S(\theta)$ の最大値と、そのときの θ の値を求めよ。