理系数学　201

2020年度　入学試験問題

数　学

注　意

(1) **解答用紙**は(一)と(二)のそれぞれ１枚ずつである。

(2) 受験番号の記入欄は，解答用紙(一)，(二)のそれぞれ表面に２か所，裏面に１か所ある。合計６か所とも正確・明瞭に記入すること。

(3) 氏名の記入欄は，解答用紙(一)，(二)の表面にそれぞれ１か所ある。合計２か所とも正確・明瞭に記入すること。

(4) 解答はすべて**解答用紙の所定の箇所**に記入すること。
問題〔Ⅰ〕の解答は解答用紙(一)の〔Ⅰ〕の欄に記入。
問題〔Ⅱ〕の解答は解答用紙(一)の〔Ⅱ〕の欄に記入。
問題〔Ⅲ〕の解答は解答用紙(二)の〔Ⅲ〕の欄に記入。
問題〔Ⅳ〕の解答は解答用紙(二)の〔Ⅳ〕の欄に記入。

(5) 問題紙の本文は２ページである。

(6) 問題紙の余白は計算に使用してもよい。

(7) 問題紙を切り離して使用してはならない。

(8) 試験開始後，問題紙に落丁・損傷がないか確認すること。

(9) 試験終了後，問題紙は各自持ち帰ること。

〔 I 〕 次の $\boxed{}$ に適する数または式を，解答用紙の同じ記号のついた $\boxed{}$ の中に記入せよ．

(1) n は3以上の自然数とし，さいころを n 回続けて投げる試行を考える．n 回目に3の目が出て，3の目が出た回数がちょうど3回である確率は $\boxed{\text{ア}}$ である．次に，n 回目までに出た n 個の目の積が偶数である確率は $\boxed{\text{イ}}$ であり，4の倍数である確率は $\boxed{\text{ウ}}$ である．また，n 回目までに出た目の最大値が4である確率は $\boxed{\text{エ}}$ である．最後に，n 回目までに出た目の最大値と最小値の差が3となる確率は $\boxed{\text{オ}}$ である．

(2) i を虚数単位とし，$\alpha = \dfrac{2\sqrt{2}}{3-\sqrt{3}i}$ とおく．α の偏角 θ を $0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で求めると，$\theta = \boxed{\text{カ}}$ である．この α を用いて，複素数 z_n を $z_1 = \sqrt{2}+(2\sqrt{3}-\sqrt{6})i$，$z_{n+1} = \alpha z_n + z_1$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ により定める．この z_{n+1} と z_n の間の関係式を $z_{n+1}-\gamma = \alpha(z_n-\gamma)$ と変形する．ここで $\gamma = \dfrac{z_1}{1-\alpha}$ であり，γ の虚部の値は $\boxed{\text{キ}}$ である．また，これを用いて z_n を n の式で表すと $z_n = \alpha^{n-1}(z_1-\gamma)+\gamma$ となる．次に，複素数平面上の点 $\mathrm{C}(\gamma)$，$\mathrm{P}_n(z_n)$，$\mathrm{P}_{n+1}(z_{n+1})$ から定まる三角形 $\mathrm{CP}_n\mathrm{P}_{n+1}$ の面積を S_n とする．$S_1 = \boxed{\text{ク}}$ であり，S_n を n を用いて表すと $S_n = \boxed{\text{ケ}}$ である．さらに，$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(k+1)S_k$ の値は $\boxed{\text{コ}}$ である．

〔 II 〕 xyz 空間に4点 $\mathrm{A}(0,0,1)$，$\mathrm{B}(1,0,0)$，$\mathrm{C}(0,2,0)$，$\mathrm{D}(2,2,0)$ をとる．また，点Pは線分BC上を動き，$\mathrm{BP}:\mathrm{PC} = t:(1-t)$ $(0 < t < 1)$ とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 点Pの座標を t を用いて表せ．

(2) 点Aから線分BCに下ろした垂線をARとする．点Rの座標を求めよ．また，線分ARの長さを求めよ．

(3) 点 $\mathrm{E}(p,q,0)$ は xy 平面上にあり，$q < 0$ とする．さらに，直線ERと直線BCは垂直に交わり，線分ERと線分ARは長さが等しいとする．このとき，点Eの座標を求めよ．

(4) 線分APと線分PDの長さの和の最小値を求めよ．また，そのときの点Pの座標を求めよ．

〔Ⅲ〕数列 $\{a_n\}$ と，その初項から第 n 項までの和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ は，次の条件を満たしている．

$$a_1 = 2,\quad 3a_{n+1} = S_n(1-2S_{n+1})+1 \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

このとき，次の問いに答えよ．

(1) a_2，S_2 の値を求めよ．

(2) S_{n+1} は，ある既約な分数式 $f(x)$ を用いて $S_{n+1} = f(S_n)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ と表される．このとき，$f(x)$ を求めよ．

(3) 定数 r，β は $r \fallingdotseq 0$，$r \fallingdotseq 1$，$\beta \fallingdotseq 1$ とする．(2) で求めた $f(x)$ に対して，分数式 $g(x) = \dfrac{x+1}{\beta x+1}$ は条件 $f(g(x)) = g(rx)$ を満たす．このとき，r，β の値を求めよ．

(4) (3) で求めた $g(x)$ に対して，数列 $\{T_n\}$ は条件 $g(T_n) = S_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を満たす．このとき，$\{T_n\}$ の一般項を求めよ．

(5) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{T_n}$ を求めよ．

〔Ⅳ〕 c を実数として，$f(x) = \log x$ $(x>0)$，$g(x) = x^2 + c$ とおく．また，曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(p, f(p))$ $(p>0)$ における接線を ℓ_p とする．このとき，次の問いに答えよ．ただし，必要ならば $\displaystyle\lim_{t\to+0} t(\log t)^2 = 0$ であることを証明なしに用いてよい．

(1) 関数 $y = \log x + \dfrac{1}{4x^2}$ $(x>0)$ の増減を調べ，その極値を求めよ．

(2) 接線 ℓ_p の方程式を求めよ．

(3) $c = c_0$ のとき，ℓ_p が曲線 $y = g(x)$ に接するような p がただ1つ存在するという．このような c_0 の値を求めよ．

(4) $c > c_0$ のとき，ℓ_p が曲線 $y = g(x)$ に接するような p が2つ存在する．その2つの p の値を p_1, p_2 $(0 < p_1 < p_2)$ とする．$p = p_1$ に対する接線 ℓ_{p_1} と曲線 $y = f(x)$，および直線 $x = a$ $(0 < a < p_1)$ で囲まれた部分が x 軸の周りに1回転してできる立体の体積を $V_1(a)$ とするとき，$\alpha = \displaystyle\lim_{a\to+0} V_1(a)$ を p_1 を用いて表せ．

(5) $p = p_2$ に対する接線 ℓ_{p_2} と曲線 $y = f(x)$，および y 軸と $y = -b$ $(b>0)$ で囲まれた部分が y 軸の周りに1回転してできる立体の体積を $V_2(b)$ とし，$\beta = \displaystyle\lim_{b\to\infty} V_2(b)$ とおく．この β と (4) の α の比の極限値 $\displaystyle\lim_{c\to c_0+0} \frac{\alpha}{\beta}$ を求めよ．